In the natural sciences, truth is established by empirical means, involving observation, measurement, and (the gold standard) experiment. In mathematics, truth is determined by constructing a proof—a logically sound argument that establishes the truth of the statement. The use of the word “argument” here is, of course, not the more common everyday use to mean a disagreement between two people, but there is a connection in that a good proof will preemptively counter (implicitly or explicitly) all the objections (counterarguments) a reader might put forward. When professional mathematicians read a proof, they generally do so in a manner reminiscent of a lawyer cross-examining a witness, constantly probing and looking for flaws. Learning how to prove things forms a major part of college mathematics. It is not something that can be mastered in a few weeks; it takes years. What can be achieved in a short period, and what I am going to try to help you do here, is gain some understanding of what it means to prove a mathematical statement, and why mathematicians make such a big deal about proofs.

**В естественных науках истина устанавливается эмпирическими средствами, включающими наблюдение, измерение и (золотой стандарт) эксперимент. В математике истина определяется путем построения доказательства—логически обоснованного аргумента, который устанавливает истинность утверждения. Использование слова “аргумент” здесь, конечно, не является более распространенным повседневным использованием для обозначения разногласий между двумя людьми, но есть связь в том, что хорошее доказательство будет упреждающе противостоять (неявно или явно) всем возражениям (контраргументам), которые может выдвинуть читатель. Когда профессиональные математики читают доказательство, они обычно делают это в манере, напоминающей перекрестный допрос адвоката свидетеля, постоянно исследующего и ищущего недостатки. Изучение того, как доказать вещи, составляет основную часть высшей математики Это не то, что можно освоить за несколько недель; на это уходят годы. То, что может быть достигнуто за короткий период, и то, что я собираюсь попытаться помочь вам сделать здесь, - это получить некоторое понимание того, что значит доказать математическое утверждение, и почему математики уделают большое внимание доказательствам.**

3.1 What is a proof?

Proofs are constructed for two main purposes: to establish truth and to communicate to others. Constructing or reading a proof is how we convince ourselves that some statement is true. I might have an intuition that some mathematical statement is true, but until I have proved it—or read a proof that convinces me—I cannot be sure. But I may also have need to convince someone else. For both purposes, a proof of a statement must explain why that statement is true. In the first case, convincing myself, it is generally enough that my argument is logically sound and I can follow it later. In the second case, where I have to convince someone else, more is required: the proof must also provide that explanation in a manner the recipient can understand. Proofs written to convince others have to succeed communicatively as well as be logically sound. (For complicated proofs, the requirement that a mathematician can follow his or her proof a few days, weeks, months, or even years later can also be significant, so even proofs written purely for personal use need to succeed communicatively.)The requirement that proofs must communicate explanations to intended readers can set a high bar. Some proofs are so deep and complex that only a few experts in the field can understand them. For example, for many centuries, most mathematicians believed—or at least held a strong suspicion—that for exponents n ≥ 3, the equation xn+ yn= zn has no whole number solutions for x, y, z. This was conjectured by the great French mathematician Pierre de Fermat in the seventeenth century, but it was not finally proved until 1994 when the British mathematician Andrew Wiles constructed a long and extremely deep proof. Though most mathematicians (myself included) lack the detailed domain knowledge to follow Wiles’ proof themselves, it did convince the experts in the field (analytic number theory), and as a result, Fermat’s ancient conjecture is now regarded as a theorem. (It was popularly known as Fermat’s Last Theorem, since it was the last of several mathematical statements Fermat announced that remained to be proved.)

**Доказательства строятся с двумя основными целями: установить истину и сообщить ее другим. Построение или чтение доказательства-это то, как мы убеждаем себя, что какое-то утверждение истинно. У меня может быть интуиция, что какое—то математическое утверждение истинно, но пока я не докажу его—или не прочитаю доказательство, которое меня убедит, - я не могу быть уверен. Но мне также может понадобиться убедить кого-то еще. Для обеих целей доказательство утверждения должно объяснить, почему это утверждение истинно. В первом случае, убеждая себя, обычно достаточно того, что мой аргумент логически обоснован, и я могу следовать ему позже. Во втором случае, когда я должен убедить кого-то другого, требуется больше: доказательство должно также предоставить это объяснение способом, который может понять получатель. Доказательства, написанные для того, чтобы убедить других, должны быть успешными в коммуникативном плане, а также логически обоснованными. (Для сложных доказательств требование, чтобы математик мог следовать своему доказательству несколько дней, недель, месяцев или даже лет спустя, также может быть значительным, поэтому даже доказательства, написанные исключительно для личного использования, должны быть успешными в коммуникативном плане.)требование, чтобы доказательства сообщали объяснения предполагаемым читателям, может установить высокую планку. Некоторые доказательства настолько глубоки и сложны, что только несколько экспертов в этой области могут их понять. Например, в течение многих столетий большинство математиков верили—или, по крайней мере, сильно подозревали,—что для экспонент n ≥ 3 уравнение xn+ yn= zn не имеет целых числовых решений для x, y, z. это предположение было выдвинуто великим французским математиком Пьером де Ферма в XVII веке, но окончательно доказано оно было только в 1994 году, когда британский математик Эндрю Уайлс построил длинное и чрезвычайно глубокое доказательство. Хотя большинству математиков (включая меня) не хватает подробных знаний о предметной области, чтобы самостоятельно следовать доказательству Уайлса, оно убедило экспертов в этой области (аналитическая теория чисел), и в результате древняя гипотеза ферма теперь рассматривается как теорема. (Она была широко известна как последняя теорема Ферма, поскольку это было последнее из нескольких математических утверждений, которые ферма объявил, что осталось доказать.)**

Fermat’s Last Theorem is an unusual example, however. Most proofs in mathematics can be read and understood by any professional mathematician, though it can take days, weeks, or even months to understand some proofs sufficiently to be convinced by them. (The examples in this book are chosen to be understood by a typical reader in a few minutes, or possibly an hour or so. Examples given to college mathematics majors can usually be understood with at most a few hours’ effort.)Proving a mathematical statement is much more than gathering evidence in its favor. To give one famous example, in the mid-eighteenth century, the great Swiss mathematician Leonard Euler stated his belief that every even number beyond 2 can be expressed as a sum of two primes. This property of even numbers had been suggested to him by Christian Goldbach, and became known as the Goldbach Conjecture. It is possible to run computer programs to check the statement for many specific even numbers, and to date (July 2012) it has been verified for all numbers up to and beyond 1.6 × 1018(1.6 quintillion). Most mathematicians believe it to be true. But it has not yet been proved. All it would take to disprove the conjecture would be to find a single even number n for which it could be shown that no two primes sum to n. Incidentally, mathematicians do not regard the Goldbach Conjecture as important. It has no known applications or even any significant consequences within mathematics. It has become famous solely because it is easy to understand, was endorsed by Euler, and has resisted all attempts at solution for over 250 years.

**Однако последняя теорема Ферма-необычный пример. Большинство доказательств в математике может быть прочитано и понято любым профессиональным математиком, хотя могут потребоваться дни, недели или даже месяцы, чтобы понять некоторые доказательства достаточно, чтобы быть убежденным ими. (Примеры в этой книге подобраны так, чтобы обычный читатель понял их за несколько минут, а может быть, и за час. Примеры, приведенные для студентов математических специальностей колледжа, обычно могут быть поняты с усилием не более нескольких часов.)Доказательство математического утверждения-это гораздо больше, чем сбор доказательств в его пользу. В середине XVIII века великий швейцарский математик Леонард Эйлер высказал свое убеждение, что каждое четное число, выходящее за пределы 2, может быть выражено как сумма двух простых чисел. Это свойство четных чисел было предложено ему Кристианом Гольдбахом и стало известно как гипотеза Гольдбаха. Можно запустить компьютерные программы, чтобы проверить утверждение для многих конкретных четных чисел, и на сегодняшний день (июль 2012 года) оно было проверено для всех чисел до и после 1,6 × 1018(1,6 квинтиллиона). Большинство математиков считают, что это правда. Но это еще не доказано. Чтобы опровергнуть эту гипотезу, достаточно было бы найти единственное четное число n, для которого можно было бы показать, что никакие два простых числа не суммируются в n. Кстати, математики не считают гипотезу Гольдбаха важной. Он не имеет известных приложений или даже каких-либо существенных последствий в математике. Она стала известной исключительно потому, что ее легко понять, была одобрена Эйлером и сопротивлялась всем попыткам решения на протяжении более 250 лет.**

Whatever you may have been told at school, there is no particular format that an argument has to have in order to count as a proof. The one absolute requirement is that it is a logically sound piece of reasoning that establishes the truth of some statement. An important secondary requirement is that it is expressed sufficiently well that an intended reader can, perhaps with some effort, follow the reasoning. In the case of professional mathematicians, the intended reader is usually another professional with expertise in the same area of mathematics; proofs written for students or laypersons generally have to supply more explanations .This means that in order to construct a proof, you have to be able to determine what constitutes a logically sound argument that convinces not just yourself, but also an intended reader. Doing that is not something you can reduce to a list of rules. Constructing mathematical proofs is one of the most creative acts of the human mind, and relatively few are capable of truly original proofs. But with some effort, any reasonably intelligent person can master the basics. That’s my goal here .Euclid’s proof that there are infinitely many primes, which I gave in Chapter 2, is a good example of a proof that requires an unusual insight. There were two creative ideas in that argument. One was to adopt the strategy of showing that an enumeration of the primes up to any point, p1, p2, p3, …, pn, can always be continued (which proves infinitude in a roundabout way). The other idea was to look at that number (p1· p2· p3· … · pn) + 1. I suspect that most of us would eventually come up with the first idea; I’d like to think I would have. (As a teenager, I simply read it in a book. I wished the author had hidden the proof and challenged readers to find it for themselves, so I could have given it a shot.) But the second creative idea is a stroke of pure genius. I’d like to think I would have eventually come up with that idea too, but I am not sure I would have. This is precisely why I find Euclid’s proof so pleasing, and revel in its brilliant core idea.

**Что бы вам ни говорили в школе, не существует особого формата, который должен иметь аргумент, чтобы считаться доказательством. Единственное абсолютное требование состоит в том, чтобы это было логически обоснованное рассуждение, которое устанавливает истинность некоторого утверждения. Важным вторичным требованием является то, что она выражена достаточно хорошо, чтобы предполагаемый читатель мог, возможно, с некоторым усилием, следить за рассуждениями. В случае профессиональных математиков, предполагаемый читатель, как правило, другой профессионал, имеющий опыт в той же области математики; доказательства, написанные для студентов или непрофессионалов, как правило, должны давать больше объяснений .Это означает, что для того, чтобы построить доказательство, вы должны быть в состоянии определить, что представляет собой логически обоснованный аргумент, который убеждает не только себя, но и предполагаемого читателя. Это не то, что вы можете свести к списку правил. Построение математических доказательств является одним из самых творческих актов человеческого разума, и относительно немногие способны к подлинно оригинальным доказательствам. Но с некоторым усилием любой разумный человек может овладеть основами. Это моя цель здесь .Доказательство Евклида, что существует бесконечно много простых чисел, которое я привел в главе 2, является хорошим примером доказательства, требующего необычного понимания. В этом споре было две творческие идеи. Один из них должен был принять стратегию, показывающую, что перечисление простых чисел до любой точки, p1, p2, p3,..., pn, всегда может быть продолжено (что доказывает бесконечность окольным путем). Другая идея состояла в том, чтобы посмотреть на это число (p1· p2· p3· ... · pn) + 1. Я подозреваю, что большинство из нас в конечном итоге пришли бы к первой идее; мне хотелось бы думать, что я бы это сделал. (Будучи подростком, я просто прочитал это в книге. Я пожалел, что автор не спрятал доказательство и не бросил вызов читателям, чтобы они нашли его сами, так что я мог бы дать ему шанс.) Но вторая творческая идея - это чистый гениальный ход. Мне хотелось бы думать, что в конце концов я тоже пришел бы к этой идее, но я не уверен, что сделал бы это. Именно поэтому я нахожу доказательство Евклида таким приятным и упиваюсь его блестящей основной идеей.**

3.2 Proof by contradiction.

Here is another great example of a clever proof, which illustrates a powerful strategy called “proof by contradiction.” I’ll lay it out in the traditional mathematical fashion of the statement of the result, labeled a “theorem,” followed by its “proof.”1But this is just an issue of style. What makes the result a theorem and the argument to verify it a proof is that the argument is logically sound and does establish the result claimed. After I have presented the argument, I’ll take a look at what makes it work as a proof.

Theorem. The number is irrational. Proof: Assume, on the contrary, that were rational. Then we could find natural numbers p and q such that where p and q have no common factors. Squaring gives 2 = p2/q2 which rearranges to give p Thus is even. Hence p must be even, since odd. Thus, there is a natural number r such that p = 2r. Substituting for p in the last equation gives and dividing both sides by .Thus is even. Hence q must be even. But p is even and p and q have no common factors, so we have a contradiction. Hence our original assumption that was rational must be false. In other words, must be irrational, which is what we set out to prove. (Marking the end of a proof with a box, or some other symbol, is a convention to facilitate rapid reading of mathematical texts, allowing the reader easily to skip over the proofs on first reading.)Many instructors give this theorem as an introductory illustration of mathematical proof. They do so because it is great on several levels. First, the result itself has enormous historical significance. When the ancient Greeks made this discovery, showing that there were geometric lengths that could not be measured by their numbers, it caused a crisis in their mathematics, and it was not until two thousand years later, toward the latter part of the nineteenth century, that mathematicians finally developed a concept of number (the real number system) adequate for measuring all geometric lengths .

**Вот еще один замечательный пример умного доказательства, который иллюстрирует мощную стратегию, называемую “доказательство противоречием".” Я изложу его в традиционной математической манере изложения результата, обозначенного как “теорема”, с последующим ее “доказательством”1. но это всего лишь вопрос стиля. Что делает результат теоремой, а аргумент для его проверки доказательством, так это то, что аргумент логически обоснован и действительно устанавливает заявленный результат. После того, как я представлю аргумент, я взгляну на то, что заставляет его работать в качестве доказательства.**

**Теорема. Это число иррационально. Доказательство: предположим, наоборот, что были рациональны. Тогда мы могли бы найти натуральные числа p и q такие, что где p и q не имеют общих факторов. Возведение в квадрат дает 2 = p2/q2, который перестраивается, чтобы дать p, таким образом, четным. Следовательно, p должно быть четным, так как нечетным. Таким образом, существует натуральное число r такое, что p = 2r. подставляя p в последнее уравнение, получаем и делим обе стороны на .Таким образом, это даже. Следовательно, q должно быть четным. Но Р четно, а р и q не имеют общих факторов, поэтому мы имеем противоречие. Следовательно, наше первоначальное предположение, которое было рациональным, должно быть ложным. Другими словами, она должна быть иррациональной, что мы и попытались доказать. (Маркировка конца доказательства прямоугольником или каким-либо другим символом-это соглашение, облегчающее быстрое чтение математических текстов, позволяя читателю легко пропустить доказательства при первом чтении.)Многие преподаватели приводят эту теорему в качестве вводной иллюстрации математического доказательства. Они делают это потому, что это здорово на нескольких уровнях. Во-первых, сам результат имеет огромное историческое значение. Когда древние греки сделали это открытие, показав, что существуют геометрические длины, которые не могут быть измерены их числами, это вызвало кризис в их математике, и только две тысячи лет спустя, ближе к концу девятнадцатого века, математики, наконец, разработали концепцию числа (реальную систему счисления), адекватную для измерения всех геометрических длин**

Second the proof is very short. Third, it uses only elementary ideas about positive whole numbers. Fourth, it uses a very common approach. Finally, it uses a very clever idea. Let’s start with the approach. It is an example of a general method called “proof by contradiction.” You want to prove some statement φ. To that end, you begin by assuming ¬φ. You then reason until you establish something that is obviously false. Often, this takes the form of deducing both a statement ψ and its negation ¬ψ. Provided the reasoning is correct, there is no way that you could deduce a false consequence starting from a true assumption. Hence, your original assumption of ¬φ must be false. In other words, φ must be true .Another way to look at this is as a special case of proof by way of the contrapositive. As we saw in Exercise 2.3.5(12), ¬φ ⇒ θ is equivalent to ¬θ ⇒ φ. To prove φ by contradiction, you start with ¬φ and you deduce F (some false statement). That is, you establish ¬φ ⇒ F. But this is the contrapositive of T ⇒ φ. Hence you have proved T ⇒ φ. Thus, by modus ponens (Exercise 2.3.4(4)), φ must be true .

**Во-вторых, доказательство очень короткое. В-третьих, он использует только элементарные представления о положительных целых числах. В-четвертых, он использует очень распространенный подход. Наконец, он использует очень умную идею. Давайте начнем с подхода. Это пример общего метода, называемого “доказательство противоречием".” Вы хотите доказать некоторое утверждение φ. Для этого вы начинаете с предположения не φ. Затем вы рассуждаете до тех пор, пока не устанавливаете нечто явно ложное. Часто это принимает форму вывода Как утверждения, так и его отрицания. При условии, что рассуждение правильно, нет никакого способа, которым вы могли бы вывести ложное следствие, отталкиваясь от истинного предположения. Следовательно, ваше первоначальное предположение о φ должно быть ложным. Другими словами, φ должно быть истинным .Другой способ взглянуть на это-как на частный случай доказательства с помощью контрапозитива. Как мы видели в упражнении 2.3.5(12), φ ⇒ θ эквивалентно θ ⇒ φ. Чтобы доказать φ противоречием, вы начинаете с φ и выводите F (некоторое ложное утверждение). То есть вы устанавливаете φ ⇒ F. Но это противопоставление T ⇒ φ. Следовательно, вы доказали T ⇒ φ. Таким образом, согласно modus ponens (упражнение 2.3.4(4)), φ должно быть истинным .**

Once you have become comfortable with the idea of proof by contradiction, and can see why deducing a contradiction from ¬φ does indeed constitute a proof of φ, then it is impossible not to be convinced by the above argument. All you need to do is work through it line by line and ask yourself, “Is there anything in this one line that is not valid?” If you reach the last line of the proof without encountering a flaw in the reasoning, then you can be sure that φ is true .For the proof that is irrational, the entire argument hinges on the issue of even versus odd numbers. The assumption about the two numbers p, q having no common factors is not a problem, since any fraction can always be written in simplest form, where the numerator and denominator do not have a common factor (other than 1).

**Как только вы освоитесь с идеей доказательства через противоречие и поймете, почему вывод противоречия из φ действительно составляет доказательство φ, тогда невозможно не быть убежденным вышеприведенным аргументом. Все, что вам нужно сделать, это проработать ее строчку за строчкой и спросить себя: “Есть ли что-нибудь в этой одной строке, что не является действительным?” Если Вы дойдете до последней строки доказательства, не обнаружив ни одного изъяна в рассуждении, то можете быть уверены, что φ истинно .Для доказательства, которое является иррациональным, весь аргумент зависит от вопроса о четных и нечетных числах. Предположение о том, что два числа p, q не имеют общих множителей, не является проблемой, так как любая дробь всегда может быть записана в простейшей форме, где числитель и знаменатель не имеют общего множителя (кроме 1).**

That was a fairly lengthy discussion of such a short argument. But I know from many years of experience that beginners find this proof hard to really understand. You may think you understand it, but do you really? Let’s see if you can produce a similar one. And if you can do that, let’s see if you can produce a generalization? You should definitely try to do this exercise. But be prepared to spend some time at it. Remember, this is not a book about solving problems. The goal is to learn to think mathematically. And just like learning to ride a bike, to ski, or to drive a car, the only way to do that is to keep trying for yourself. Looking up the answer or being shown it by someone else does not help. It really doesn’t. Look it up now and you will pay heavily later. The value comes from spending time trying to solve it for yourself.

Exercises 3.2.11. Prove that is irrational.2. Is it true that is irrational for every natural number N?3. If not, then for what N is irrational? Formulate and prove a result of the form “ irrational if and only if N …”

Proofs by contradiction are a common approach because they have a clear starting point. To obtain a direct proof of some statement φ, you have to generate an argument that culminates in φ. But where do you start? The only way to proceed is to try to argue successively backwards to see what chain of steps ends with φ. There are many possible starting points, but just one goal, and you have to end up at that goal. That can be difficult. But with proof by contradiction, there is a clear starting point, and the proof is complete once you have deduced a contradiction—any contradiction. With such a wide target area, that is often a much easier task .The proof by contradiction approach is particularly suited to establishing that a certain object does not exist; for example, that a particular kind of equation does not have a solution. You begin by assuming that such an object does exist, then you use that (assumed) object to deduce a false consequence or a pair of contradictory statements. The irrationality of is a good example, since that states the non-existence of two natural numbers p, q whose ratio is equal to .

**Это было довольно продолжительное обсуждение такого короткого спора. Но я знаю из многолетнего опыта, что новичкам трудно понять это доказательство. Вы можете думать, что понимаете это, но так ли это на самом деле? Давайте посмотрим, сможете ли вы создать такой же. И если вы можете это сделать, давайте посмотрим, сможете ли вы произвести обобщение? Вы обязательно должны попробовать выполнить это упражнение. Но будьте готовы потратить на это некоторое время. Помните, что это не книга о решении проблем. Цель состоит в том, чтобы научиться мыслить математически. И точно так же, как научиться ездить на велосипеде, лыжах или водить машину, единственный способ сделать это-продолжать пытаться для себя. Поиск ответа или показ его кем-то другим не помогает. На самом деле это не так. Посмотрите его сейчас, и вы заплатите много позже. Ценность заключается в том, что вы тратите время на то, чтобы решить ее самостоятельно.**

**Упражнения 3.2.11. Докажем, что является иррациональным.2. Это правда, что это иррационально для любого натурального числа n?3. Если нет, то для чего N иррационально? Формулировать и доказывать результат вида “ иррационально тогда и только тогда, когда N ...”**

**доказательства по противоречию являются общим подходом, поскольку они имеют четкую отправную точку. Чтобы получить прямое доказательство некоторого утверждения φ, вы должны сгенерировать аргумент, который достигает кульминации в φ. Но с чего начать? Единственный способ продолжить-попытаться последовательно рассуждать в обратном направлении, чтобы увидеть, какая цепочка шагов заканчивается φ. Есть много возможных отправных точек, но только одна цель, и вы должны в конечном итоге достичь этой цели. Это может быть трудно. Но при доказательстве противоречием есть ясная отправная точка, и доказательство становится полным, как только вы выводите противоречие—любое противоречие. С такой широкой целевой областью, это часто гораздо более легкая задача .Подход доказательства противоречием особенно подходит для установления того, что определенный объект не существует; например, что определенный вид уравнения не имеет решения. Вы начинаете с предположения, что такой объект действительно существует, а затем используете этот (предполагаемый) объект для вывода ложного следствия или пары противоречивых утверждений. Иррациональность является хорошим примером, так как она утверждает несуществование двух натуральных чисел p, q, отношение которых равно .**

3.3 Proving conditionals.

Even though there is no cookie-cutter, template approach to constructing proofs, there are some guidelines, and we have just encountered two. Proof by contradiction is often a good approach when there is no obvious place to start, and in particular that makes it a useful method to prove non-existence statements. Of course, you still have to construct a proof. You’ve simply replaced a narrow goalpost with an unclear starting point by a much wider one with a known starting point! But like Robert Frost’s fork in the trail, that choice can make all the difference .There are a number of other guidelines. I’ll tell you some, but do bear in mind that these are not templates. As long as you continue to look for templates to construct proofs, you are going to encounter significant difficulties. You have to start each new problem by analyzing the statement that you want to prove. What exactly does it say? What kind of argument might establish that claim ?

**Несмотря на то, что нет никакого шаблонного подхода к построению доказательств, есть некоторые рекомендации, и мы только что столкнулись с двумя. Доказательство противоречием часто является хорошим подходом, когда нет очевидного места для начала, и, в частности, это делает его полезным методом для доказательства утверждений о несуществовании. Конечно, вам все еще нужно построить доказательство. Вы просто заменили узкую стойку ворот с неясной начальной точкой на гораздо более широкую с известной начальной точкой! Но, как и развилка Роберта Фроста, этот выбор может изменить все .Есть и ряд других рекомендаций. Я расскажу вам кое-что, но имейте в виду, что это не Шаблоны. Пока вы продолжаете искать шаблоны для построения доказательств, вы столкнетесь со значительными трудностями. Вы должны начинать каждую новую задачу с анализа утверждения, которое вы хотите доказать. Что именно там написано? Какие аргументы могли бы подтвердить это утверждение ?**

For example, suppose we wish to establish the truth of a conditional φ ⇒ ψ By the definition of the conditional, this will certainly be true whenever φ is false, so we need only consider the case when φ is true. That is, we can assume φ. Then, for the conditional to be valid, ψ must also be true .Thus, using our assumption that φ is true, we must present an argument that demonstrates the truth of ψ. This, of course, accords with our everyday understanding of implication. Thus, when it comes to proving conditionals, the problems concerning the distinction between the conditional and real implication that we discussed do not arise. To take a specific example, suppose we want to prove that for any given pair x, y of real numbers:(x and y are rational numbers) ⇒ (x + y is a rational number)We start by assuming x and y are rational numbers. Then we can find integers p, q, m, n such that x = p/m, y = q/n. Then Hence, as pn + qm and mn are integers, we conclude that x + y is rational. The statement is proved.

**Например, предположим, что мы хотим установить истинность условного выражения φ ⇒ ψ по определению условного, это, безусловно, будет истинно всякий раз, когда φ ложно, поэтому нам нужно только рассмотреть случай, когда φ истинно. То есть мы можем предположить φ. Тогда, чтобы условие было действительным, ψ также должно быть истинным .Таким образом, используя наше предположение о том, что φ истинно, мы должны представить аргумент, который демонстрирует истинность ψ. Это, конечно, согласуется с нашим повседневным пониманием импликации. Таким образом, когда дело доходит до доказательства условных выражений, проблемы, касающиеся различия между условной и реальной импликацией, которые мы обсуждали, не возникают. Чтобы взять конкретный пример, предположим, что мы хотим доказать, что для любой заданной пары x, y действительных чисел:(x и y-рациональные числа) ⇒ (x + y-рациональное число)мы начинаем с предположения, что x и y-рациональные числа. Тогда мы можем найти целые числа p, q, m, n такие, что x = p/m, y = q/n. Тогда, следовательно, поскольку pn + qm и mn-целые числа, мы заключаем, что x + y рационально. Это утверждение доказано.**

Let r, s be irrationals. For each of the following, say whether the given number is necessarily irrational, and prove your answer. (The last one is particularly nice. I’ll give the solution in a moment, but you should definitely try it first.)1. r + 32. 5r3. r + s4. rs5.6. rs Conditionals involving quantifiers are sometimes best handled by proving the contrapositive, using the equivalence of φ ⇒ ψ with the contrapositive (¬ψ) ⇒ (¬φ).For example, suppose that for some given unknown angle θ we wish to prove the conditional.This statement is equivalent to which reduces to the positive form. This is an implication we know to be correct. This proves the original implication by virtue of what equivalence means. (To prove a statement, it is enough to prove any equivalent statement.)To prove a biconditional (an equivalence) φ ⇔ ψ, you generally prove the two conditionals φ ⇒ ψ and ψ ⇒ φ. (Why is this enough?)Occasionally, however, you might find it more natural to prove the two conditionals φ ⇒ ψ and (¬φ) ⇒ (¬ψ). (Why will this work?)

**Пусть r, s-иррациональны. Для каждого из следующих случаев скажите, является ли данное число обязательно иррациональным, и докажите свой ответ. (Последнее особенно приятно. Я дам решение через мгновение, но вы обязательно должны попробовать его сначала.)1. r + 32. 5r3. r + s4. rs5.6. rs условные выражения, включающие кванторы, иногда лучше всего обрабатываются путем доказательства контрапозитива, используя эквивалентность φ ⇒ ψ с контрапозитивом (ψ) ⇒ (φ).например, предположим, что для некоторого заданного неизвестного угла θ мы хотим доказать условное.Это утверждение эквивалентно тому, которое сводится к положительной форме. Это подразумевает, что мы знаем, чтобы быть правильным. Это доказывает первоначальную импликацию в силу того, что означает эквивалентность. (Чтобы доказать утверждение, достаточно доказать любое эквивалентное утверждение.)чтобы доказать бикондиционирование (эквивалентность) φ ⇔ ψ, вы обычно доказываете два условия φ ⇒ ψ и ψ ⇒ φ. (Почему этого достаточно?)Однако иногда вам может показаться более естественным доказать два условия φ ⇒ ψ и (φ) ⇒ (ψ). (Почему это сработает?)**

Exercises 3.3.21. Explain why proving φ ⇒ ∀ and ψ ⇒ φ establishes the truth of φ ⇔ ψ.2. Explain why proving φ ⇒ ψ and (¬φ) ⇒ (¬ψ) establishes the truth of φ ⇔ ψ.3. Prove that if five investors split a payout of $2 million, at least one investor receives at least $400,000.4. Write down the converses of the following conditional statements:(a) If the Dollar falls, the Yuan will rise. (b) If x < y then −y < −x. (For x, y real numbers.) (c) If two triangles are congruent they have the same area.(d) The quadratic equation ax2+ bx+c = 0 has a solution whenever b2≥ 4a.(Where a, b, c, x denote real numbers and a ≠ 0.)(e) Let ABCD be a quadrilateral. If the opposite sides of ABCD are pair wise equal, then the opposite angles are pairwise equal.(f) Let ABCD be a quadrilateral. If all four sides of ABCD are equal, then all four angles are equal.(g) If n is not divisible by 3 then n2+ 5 is divisible by 3. (For n a natural number.)5. Discounting the first example, which of the statements in the previous exercise are true, for which is the converse true, and which are equivalent? Prove your answers.6. Let m and n be integers. Prove that:

(a) If m and n are even, then m + n is even.

(b) If m and n are even, then mn is divisible by 4.

(c) If m and n are odd, then m + n is even.

(d) If one of m, n is even and the other is odd, then m + n is odd.

(e) If one of m, n is even and the other is odd, then mn is even.7. Prove or disprove the statement “An integer n is divisible by 12 if and only if n3isdivisible by 12.”8. If you have not yet solved Exercise 3.3.1(6), have another attempt, using the hint to try s =

**Упражнения 3.3.21. Объяснить, почему доказывая φ ∀ ⇒ ψ и φ ⇒ устанавливает истинность ψ φ ⇔.2. Объяснить, почему доказывая ψ φ ⇒ а (φ) ⇒ (ψ) устанавливает истинность ψ φ ⇔.3. Доказать, что если пять инвесторов разделить выплату $2 млн, по крайней мере, один инвестор получает как минимум в 400000$.4. Запишите беседует из следующих условных операторов:(а) если доллар падает, юань будет расти. b) Если x < y, то −y < −x. (Для x, y действительных чисел.) в) если два треугольника конгруэнтны, то они имеют одинаковую площадь.d) квадратичное уравнение ax2+ bx+c = 0 имеет решение всякий раз, когда b2≥ 4a.(Где a, b, c, x обозначают действительные числа и a ≠ 0.)(e) пусть ABCD-четырехугольник. Если противоположные стороны ABCD попарно равны, то противоположные углы попарно равны.f) пусть ABCD-четырехугольник. Если все четыре стороны ABCD равны, то все четыре угла равны.(g) если n не делится на 3, то n2+ 5 делится на 3. (для n натуральное число.)5. Если отбросить первый пример, то какие из высказываний в предыдущем упражнении истинны, для каких верно обратное, а какие эквивалентны? Докажите свои ответы.6. Пусть M и N-целые числа. Доказать это:**

**а) если m и n четны, то m + n четно.**

**b) если m и n четны, то mn делится на 4.**

**в) если m и n нечетны, то m + n четно.**

**(d) Если одно из m, n четно, а другое нечетно, то m + n нечетно.**

**(д) Если одно из m, n четно, а другое нечетно, то mn четно.7. докажите или опровергните утверждение “целое число n делится на 12 тогда и только тогда, когда N3 делится на 12". 8. Если вы еще не решили упражнение 3.3.1(6), сделайте еще одну попытку, используя подсказку попробовать s =**

.3.4 Proving quantified statements

The most obvious way to prove an existence statement ∃xA(x) is to find a particular object a for which A(a). For example, to prove that an irrational number exists it is enough to show that is irrational. But sometimes you have to adopt a more indirect route. For example, such is the case with the last part of Exercises 3.3.1, which I promised I’d come back to. Here it is. (If you did not get it yet, you might want to give it one more try before you read on.)Theorem. There are irrationals r, s such that r s is rational. Proof: We consider two cases. Case 1. If is rational, we can take and the theorem is proved.Case 2. If is irrational, we can take and then and again the theorem is proved. □Note that in the above proof, we do not know which of the two possibilities holds .We did not produce two specific irrationals r, s such that rsis rational. We simply showed that such a pair exists. Our proof is an example of proof by cases, which is another technique that can be useful.

**Самый очевидный способ доказать утверждение существования ∃xA(x) - это найти конкретный объект a, для которого A(a). Например, чтобы доказать, что иррациональное число существует, достаточно показать, что оно иррационально. Но иногда приходится идти более окольным путем. Например, так обстоит дело с последней частью упражнения 3.3.1, к которой я обещал вернуться. Вот он. (Если вы еще не получили его, вы можете дать ему еще одну попытку, прежде чем читать дальше.)Теорема. Существует иррациональных чисел Р, таких, что Р есть рациональное зерно. Доказательство: мы рассматриваем два случая. Случай 1. Если рационально, то мы можем взять и теорему доказать.Случай 2. Если это иррационально, мы можем взять и тогда, и снова теорема доказана. Обратите внимание, что в приведенном выше доказательстве мы не знаем, какая из двух возможностей имеет место .Мы не произвели два конкретных иррациональных r, s таких, что RS рациональны. Мы просто показали, что такая пара существует. Наше доказательство является примером доказательства по случаям, что является еще одним методом, который может быть полезен.**

Next, let’s take a look at how to prove a universal statement ∀xA(x). One possibility is to take an arbitrary x and show that it must satisfy A(x). For instance, suppose we wish to prove the assertion We can do this as follows.

Let n be an arbitrary natural number. Then n 2 is a natural number. Hence m = n2+1 is a natural number. Since m > n2, this shows that This is a proof because our original n was quite arbitrary. We said nothing at all about n: it could be any natural number. Hence the argument is valid for all n in. This is not the same as picking a particular n. If we had randomly chosen, say, n 37, the proof would not have been valid—even though we had chosen this n quite at random. For instance, suppose we wanted to prove By picking at random a particular n we might happen to pick n = 9. But this does not prove the statement of course, because our choice was an arbitrary choice (albeit an unlucky one as far as our goal is concerned) of a particular n, and not a choice of an arbitrary n.

**Далее давайте посмотрим, как доказать универсальное утверждение ∀xA(x). Одна из возможностей состоит в том, чтобы взять произвольный x и показать, что он должен удовлетворять A(x). Например, предположим, что мы хотим доказать утверждение, что мы можем сделать это следующим образом.**

**Пусть n - произвольное натуральное число. Тогда n 2-натуральное число. Следовательно, m = n2+1-натуральное число. Поскольку m > n2, это показывает, что это доказательство, потому что наше исходное n было совершенно произвольным. Мы вообще ничего не говорили о n: это может быть любое натуральное число. Следовательно, довод действителен для всех Н. Это не то же самое, что выбрать конкретное n. Если бы мы случайно выбрали, скажем, n 37, доказательство не было бы действительным—даже если бы мы выбрали это n совершенно случайно. Например, предположим, что мы хотим доказать, выбрав наугад конкретное число n, что мы можем случайно выбрать n = 9. Но это, конечно, не доказывает утверждения, потому что наш выбор был произвольным выбором (хотя и неудачным в том, что касается нашей цели) конкретного n, а не выбором произвольного n.**

In practice what this amounts to is that whenever we start a proof by saying, “Let n be arbitrary”, we use the symbol n throughout the proof, and assume also that the value of n remains constant throughout, but we make absolutely no restriction on what the value of n is. Statements of the form ∀xA(x) are sometimes proved by the method of contradiction. By assuming ¬∀xA(x) we obtain an x such that ¬A(x) (because ¬∀xA(x) is equivalent to ∃x¬A(x)). Now we have a place to start. The difficulty is finding the finish (i.e., the contradiction).Exercises 3.4.11. Prove or disprove the statement “All birds can fly.”2. Prove or disprove the claim.3. Prove that between any two unequal rationals there is a third rational.4. Say whether each of the following is true or false, and support your decision by aproof:(a) There exist real numbers x and y such that x + y = y. (bien ∀x∃y(x + y = 0) (where x, y are real number variables).

(c).(d) For all integers a, b, c, if a divides bc (without remainder), then either a divides b or a divides c.(e) The sum of any five consecutive integers is divisible by 5 (without remainder).(f) For any integer n, the number n2+ n + 1 is odd.

(g) Between any two distinct rational numbers there is a third rational number.

(h) For any real numbers x, y, if x is rational and y is irrational, then x + y is irrational.(i) For any real numbers x, y, if x + y is irrational, then at least one of x, y is irrational.(j) For any real numbers x, y, if x + y is rational, then at least one of x, y isrational.5. Prove or disprove the claim that there are integers m, n such that m2+ mn + n2isa perfect square.6. Prove that for any positive m there is a positive integer n such that mn + 1 is a perfect square.7. Show that there is a quadratic f(n) = n2+ bn + c, with positive integer coefficients b, c, such that f(n) is composite (i.., not prime) for all positive integers n.8. Prove that for any finite collection of points in the plane, not all collinear, there is a triangle having three of the points as its vertices, which contains none of the other points in its interior.9. Prove that if every even natural number greater than 2 is a sum of two primes (the Goldbach Conjecture), then every odd natural number greater than 5 is a sum of three primes. There are other possibilities for proving universally quantified statements. In particular, statements of the form where the quantification is over all natural numbers, are often proved by a method known as induction.

**На практике это сводится к тому, что всякий раз, когда мы начинаем доказательство, говоря: “Пусть n произвольно”, мы используем символ n во всем доказательстве и предполагаем также, что значение n остается постоянным во всем, но мы не делаем абсолютно никаких ограничений на то, что такое значение n. Утверждения вида ∀xA(x) иногда доказываются методом противоречия. Предполагая ∀xA(x), мы получаем x такой, что A(x) (потому что ∀xA(x) эквивалентно ∃xA(x)). Теперь нам есть с чего начать. Трудность заключается в том, чтобы найти финиш (то есть противоречие).Упражнения 3.4.11. Докажите или опровергните утверждение “все птицы могут летать”. 2. докажите или опровергните утверждение.3. докажите, что между любыми двумя неравными рациональными числами существует третий рациональный.4. скажите, является ли каждое из следующих значений истинным или ложным, и подтвердите свое решение следующим образом:(а) существуют действительные числа x и y, такие что x + y = y. (bien ∀x∃y(x + y = 0) (где x, y-переменные действительных чисел).**

**(c).(d) для всех целых чисел a, b, c, если a делит bc (без остатка), то либо a делит b, либо a делит c.(e) сумма любых пяти последовательных целых чисел делится на 5 (без остатка).(f) для любого целого числа n число n2+ n + 1 нечетно.**

**g) между любыми двумя различными рациональными числами существует третье рациональное число.**

**(h) для любых действительных чисел x, y, если x рационально, а y иррационально, то x + y иррационально.(i) для любых действительных чисел x, y, если x + y иррационально, то по крайней мере одно из x, y иррационально.(J) для любых действительных чисел X и y, если X + Y является рациональным, то, по крайней мере один из X и y isrational.5. Доказать или опровергнуть утверждение о том, что существуют целые числа m, n таковы, что м2+ МН + идеальный квадрат n2isa.6. Докажите, что для любого положительного г существует положительное целое число n таких, что мn + 1 является полным квадратом.7. Показать, что существует квадратичная ф(Н) = Н2+ Н + С, с положительными целыми коэффициентами B и C, такие, что F(N) является составной (я.., не премьер) для всех положительных целых чисел n.8. Докажите, что для любого конечного набора точек на плоскости, не все лежат, есть треугольник, имеющий три точки как вершины, которая не содержит никаких других точек в интерьере.9. Докажите, что если каждый даже натуральное число, большее 2, является суммой двух простых чисел (в Гольдбаха), то каждое нечетное натуральное число, большее 5, является суммой трех простых чисел. Существуют и другие возможности для доказательства универсально количественных утверждений. В частности, утверждения вида, в котором квантификация выполняется над всеми натуральными числами, часто доказываются методом, известным как индукция.**